Programme de colle n°10

semaine du 1 au 5 décembre

Notions vues en cours

Chapitre 13 : Suites réelles (en complément du programme précédent) :

- Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 : terme général et somme des termes pour les suites arithmétiques et géométriques, terme général pour les suites arithmético-géométriques
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : détermination du terme général (cas réel et complexe)
- Suite récurrente d'ordre 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ donné et f une fonction réelle.
  - Intervalle stable par f ; si J est stable par f et $u_0 \in J$, alors (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in J$
  - Point fixe de f ; si la suite (u_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f
  - Méthode générale pour trouver la limite de (u_n) sur un ensemble où f est croissante *(on pourra recevoir de l'aide sur les étapes à suivre, notamment si f est décroissante, mais les arguments à utiliser pour réaliser chacune de ces étapes doivent être maitrisés).*

Chapitre 14 : Limites, continuité

- On se limite à ce stade aux fonctions réelles, i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Une fonction vérifie une propriété sur J si $f|_J$ vérifie cette propriété (sauf pour la continuité et la dérivabilité), vérification d'une propriété au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$
- Limite (finie ou non) d'une fonction en a (dans $\mathbb{R}$ ou infini), notation $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ / $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ / $\lim\limits_{a} f = \ell$
- Unicité de cette limite, admettre une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ implique d'être bornée au voisinage de a
- Caractérisation séquentielle de la limite
- Limites et inégalités : passage à la limite, théorème d'encadrement, si $f \leq g$ au voisinage de a et f tend vers $+\infty$ en a, alors g tend vers $+\infty$ en a
- Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, composition. Si f est bornée au voisinage de a et g tend vers zéro en a, alors fg tend vers zéro en a.
- Limite à gauche, limite à droite. L'existence d'une limite implique l'existence d'une limite à gauche et d'une limite à droite (lorsque cela a un sens) qui sont égales. Cas particulier des limites à gauche et à droite sur les bords.
- Théorème de la limite monotone
- Continuité en un point, discontinuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité
- Continuité à gauche, à droite. La continuité en un point équivaut à la continuité à gauche et à droite
- f est continue sur un ensemble D si f est continue en chaque point de D. Ensemble $\mathscr{C}(D,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(D)$.
- Opérations et continuité : somme, produit, inverse, composition (en un point, sur un intervalle)

Le calcul de limites par le taux d'accroissement n'est pas au programme de cette semaine.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **12 ou 13**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définition de $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ en termes de quantificateurs : l'examinateur demandera 3 cas parmi les 9 (a fini, $+\infty$ ou $-\infty$, idem pour ℓ) Chapitre 14, Définitions 14.2 à 14.5
2. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$ avec a, ℓ, ℓ' tous finis. Déterminer la limite de $f(x)+g(x)$ et de $f(x)g(x)$ quand x tend vers a. Chapitre 14, Théorème 14.11
3. Caractérisation séquentielle de la limite : on ne démontrera que le sens $(ii) \implies (i)$, càd celui dont la conclusion est que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. On ne traitera que le cas où a et ℓ sont finis Chapitre 14, Théorème 14.15

Questions Flash au programme :

Chapitre 13 :

- Donner la définition de "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée" ainsi que "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante"
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $u_n \to \ell$ en termes de quantificateurs.
- Que signifie l'assertion "(u_n) est convergente" ? et "(u_n) est divergente" ?
- Donner la définition de $u_n \to +\infty$ en termes de quantificateurs.
- Soit (u_n) une suite croissante. Que doit-elle vérifier pour être convergente ? et divergente ?
- Donner la définition de "(u_n) et (v_n) sont adjacentes" puis oralement : que peut-on en déduire sur (u_n) et (v_n) ?
- Que doit vérifier l'application φ pour que $(u_{\varphi(n)})$ soit une suite extraite de (u_n) ?
- Donner la définition de "ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n)".
- On suppose que $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell'$. Que peut-on dire si $\ell \neq \ell'$? et si $\ell = \ell'$?
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass ~~et le démontrer~~

Chapitre 12 :

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Que doit vérifier M pour être un majorant de A ? pour être le maximum de A ?
- Que veut-dire la phrase "$\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure" ?
- Compléter la caractérisation de la borne inférieure "avec des ε" : $m = \inf A \iff \ldots$
- Compléter la caractérisation de la borne supérieure avec des suites : $M = \sup A \iff \ldots$
- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Donner la définition de l'écriture "$\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$"
- Soit $D \subset \mathbb{R}$. Donner une définition de "D est dense dans $\mathbb{R}$" (deux assertions possibles, une seule suffit).
- Soit $D \subset \mathbb{R}$. Donner une caractérisation de "D est dense dans $\mathbb{R}$" en termes de suites.